

Übungen zur Analysis 3 Lösung

5.1 Messbarkeit monotoner Funktionen. Es seien $\Omega, \Omega' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine monoton steigende Funktion. Beweisen Sie, dass $f : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \rightarrow (\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$ messbar ist.

Lösung

Aus T2.3 wissen wir, dass $\mathcal{B}(\Omega) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid A \subset \Omega\}$ und Bsp. 1.78 zeigt, dass $\{]-\infty, a] \cap \Omega \mid a \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeugendensystem ist. Ist f monoton, so ist für $s := \sup\{c \in f^{-1}(]-\infty, a]) \cup \{-\infty\}\} \in f^{-1}(]-\infty, a])$ die Menge $f^{-1}(]-\infty, a] \cap \Omega') =]-\infty, s] \cap \Omega$ (vgl. T4.2(b)) messbar, und für $s \notin f^{-1}(]-\infty, a])$ die Menge $f^{-1}(]-\infty, a] \cap \Omega') =]-\infty, s[\cap \Omega$ messbar.

5.2 Variante des Satzes über monotone Klassen. Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ein $\cap$ -stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$ und $M \subseteq [0, \infty]^\Omega$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt $1_A \in M$.
- (b) Für alle $A \subseteq \Omega$ mit $1_A \in M$ gilt $1_{A^c} \in M$.
- (c) Für alle $f, g \in M$ und alle $\alpha \in [0, \infty[$ gilt $f + g \in M$ und $\alpha f \in M$.
- (d) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nichtnegative aufsteigende Folge mit Werten in M und ist $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit $f_n \uparrow f$, so ist $f \in M$.

Zeigen Sie, dass dann $\overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq M$ gilt.

Lösung

Wir imitieren den Beweis des Satzes über monotone Klassen: Betrachte zunächst

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \mid 1_A \in M\}.$$

Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, denn

- $\emptyset \in \mathcal{D}$, denn $\Omega \in \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ und nach (b) gilt dann auch $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{D}$.
- Die Implikation $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$ ist genau die Voraussetzung (b).
- $\coprod_i A_i \in \mathcal{D}$ für $A_i \in \mathcal{D}$, denn mit $B_n := \coprod_{i=1}^n A_i$ gilt $1_{B_n} = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}$ und damit wegen (c), dass auch $B_n \in \mathcal{D}$. Damit ist 1_{B_n} eine nichtnegative aufsteigende Folge mit Werten in M , die von unten gegen 1_A konvergiert. Damit ist wegen (d) auch $A \in \mathcal{D}$.

Damit ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System und nach dem Dynkin-Lemma gilt $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}$. Damit liegen alle Indikatorfunktionen und wegen (c) auch alle nichtnegativen Treppenfunktionen $\mathcal{E}_+(\Omega)$ in M . Da sich jede nichtnegative messbare Funktion durch eine aufsteigende Folge von Treppenfunktionen approximieren lässt, gilt wegen (d) auch $\overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}) \subset M$.

5.3 Von einer Abbildung erzeugte σ -Algebra.

Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Wir definieren

$$\sigma(X) := \{X^{-1}[A'] \mid A' \in \mathcal{A}'\}.$$

Das Mengensystem $\sigma(X)$ wird die von X erzeugte σ -Algebra genannt.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(X)$ in der Tat eine σ -Algebra ist.

(b) ε Zeigen Sie, dass $\sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$ äquivalent zur $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -Messbarkeit von X ist.

Lösung

(a) Dies folgt aus Aufgabe 4.5 (bzw. T4.2) und $\mathcal{A}'$ σ -Algebra.

(b) ε X ist $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar $\Leftrightarrow \forall A' \in \mathcal{A}' : X^{-1}(A') \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \sigma(X) \subset \mathcal{A}$.

5.4 Faktorisierung messbarer Abbildungen. Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Abbildungen mit $\mathcal{A} = \sigma(Y)$. Zeigen Sie, dass es eine messbare Abbildung $Z : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $X = Z \circ Y$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass X eine Indikatorfunktion ist. Approximieren Sie im allgemeinen Fall X durch Treppenfunktionen.

Lösung

Setze

$$M = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{es existiert ein } Z : \Omega' \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } X = Z \circ Y\}.$$

Wir wollen auf M den Satz über monotone Klassen anwenden. Bemerke zunächst, dass M ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\Omega$ ist. Denn für $X, X' \in M$ existieren Z, Z' , so dass $X = Z \circ Y$ und $X' = Z' \circ Y$. Somit gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass

$$X + \lambda X' = (Z + \lambda Z') \circ Y.$$

Wir zeigen nun, dass alle Indikatorfunktionen 1_A für $A \in \mathcal{A}$ in M liegen. Wegen $\mathcal{A} = \sigma(Y) = \{Y^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}$ existiert für $A \in \mathcal{A}$ also ein $A' \in \mathcal{A}'$ mit $A = Y^{-1}(A')$. Setze $Z = 1_{A'}$. Dann gilt

$$1_{A'} \circ Y(p) = 1 \Leftrightarrow Y(p) \in A' \Leftrightarrow p \in Y^{-1}(A') = A.$$

Also ist $1_{A'} \circ Y = 1_A$ und damit $1_A \in M$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Sei nun $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine aufsteigende Folge von messbaren Funktionen und Z_n wie oben. Wegen $X_n = Z_n \circ Y$ ist auch Z_n eine Folge aufsteigender Funktionen und es gilt

$$\left(\sup_n Z_n\right) \circ Y = \sup_n (Z_n \circ Y) = \sup_n X_n.$$

Also liegt auch $\sup_n X_n$ in M . Wir wenden nun den Satz über monotone Klassen mit $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ an und finden, dass M jede messbare Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ enthält.

5.5ε Bildmaß unter der Komposition von Abbildungen. Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ und $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ messbare Räume, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ und $g : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\Omega'', \mathcal{A}'')$ messbare Abbildungen und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Beweisen Sie $g[f[\mu]] = (g \circ f)[\mu]$.

Lösung

$$\forall A \in \mathcal{A}'' : g[f[\mu]](A) = f[\mu](g^{-1}(A)) = \mu(f^{-1}g^{-1}(A)) = \mu((gf)^{-1}(A)) = (g \circ f)[\mu](A).$$